

Théorie relationnelle des positions multiplicatives

TRPM

Géométrie relationnelle, volume, holonomie et inférence

Édition critique et consolidée

Ce document reconstruit le modèle TRPM autour de son nom exact, fixe la convention des relations orientées, distingue les rapports des transformations matricielles et situe chaque résultat par rapport aux théories standards. Il développe la filiation Saaty–Magnot et formalise une admissibilité relative à l'estimand : repère, métrique, orientation et volume ne demandent pas les mêmes invariances. La contribution potentielle est ainsi déplacée de la géométrie plate vers une théorie d'identifiabilité avec abstention.

Maëlan Guillonnet

Intuition initiale : 2024

24 juillet 2026

Version consolidée

Statut instrumental : les essais numériques marqués [SLIT] valident l'instrument sur des données synthétiques à vérité connue. Ils ne constituent pas une observation empirique du monde réel.

Résumé

La TRPM signifie **Théorie relationnelle des positions multiplicatives**. Son univers intrinsèque prend 1 pour identité, exclut 0, qui n'est pas multiplicatif, et déploie ses grandeurs de 1 vers l'infini. Une relation orientée porte une grandeur $m \geq 1$ et un sens ; son facteur évalué m^σ peut être inférieur à 1 lorsque le sens est inverse. Le logarithme fournit une carte de mesure commode, mais il n'est ni l'espace d'existence de la théorie ni son ontologie.

Le quart de sphère plein, sa mesure et son volume restent des objets géométriques standards exprimés dans ce langage relationnel. Les matrices introduisent, si les données l'autorisent, une famille supplémentaire d'opérateurs couplés. Leur écriture linéaire dans une carte logarithmique est une représentation de calcul ; elle ne définit pas l'univers de la TRPM.

Dans le cas scalaire, une table relationnelle cohérente est exactement une matrice de comparaisons par paires au sens de Saaty, à la convention d'orientation près. Le vecteur de Perron, l'indice de cohérence et la révision des jugements incohérents constituent donc des antécédents directs. Magnot établit ensuite le pont entre ces matrices, les relations à valeurs dans un groupe et l'holonomie discrète, jusque dans des groupes non abéliens.

La frontière de recherche ne se situe ni dans la formule du volume ni dans la classification standard de l'holonomie. Elle réside dans une question statistique et sélective : à partir de relations incomplètes et bruitées, quels objets globaux sont identifiables, avec quel niveau de confiance, et quand le système doit-il retourner $\perp_F$ pour l'estimand F , plutôt que produire une reconstruction forcée ?

Phrase directrice

Les relations sont premières. Une position globale est une solution éventuelle de leur compatibilité. Lorsqu'une telle solution n'est pas identifiable, la TRPM doit préciser quel objet demeure transportable et quel estimand doit retourner $\perp$.

Table des matières

1	Objet, convention et axiomes	1
1.1	Le nom exact	1
1.2	Convention d'orientation	1
1.3	L'univers de 1 vers l'infini	1
1.4	Quatre principes	1
2	Mesurer l'univers multiplicatif	2
2.1	La carte logarithmique comme instrument	2
2.2	Mesure invariante dans la carte évaluée	3
3	Quart de sphère et volume relationnel	3
3.1	Définition	3
3.2	Paramétrisation et volume	3
3.3	Points numériques pour $K = 2$	4
4	Tables relationnelles et volume sans coordonnées absolues	4

4.1	La table des relations	4
4.2	Volume tétraédrique relationnel	5
5	Dénombrement et estimation de π	5
6	Reconstruction, torseur et holonomie	6
6.1	Relations évaluées comme 1-cochaîne	6
6.2	Flatitude locale et holonomie globale	6
6.3	Fermeture exacte sur un réseau cohérent	7
7	Du rapport orienté à l'opérateur couplé	7
7.1	Deux familles à ne pas confondre	7
7.2	Carte de calcul et opérateurs distincts	7
7.3	Quand les données autorisent-elles une matrice ?	8
8	Holonomie matricielle, forme et volume	9
8.1	Quand le chemin modifie la reconstruction	9
8.2	Déformation du repère et conservation du volume	9
8.3	Observables d'holonomie	9
8.4	Régimes corrigés	10
9	De la cohérence à l'admissibilité par estimand	10
9.1	Représentation, approximation et diagnostic d'une table réciproque	10
9.2	Des comparaisons locales aux reconstructions globales	11
9.3	Critère déterministe relatif à l'estimand	11
9.4	Version bruitée : décision ternaire et règle d'arrêt	12
9.5	Origine interne et statut scientifique	13
9.6	Le résultat qui reste à établir	13
10	Antécédents et comparaison stricte	13
11	Nombre d'or : insertion, structure et échantillonnage	15
11.1	Trois niveaux à ne pas confondre	15
11.2	La piste défendable : discrédance de l'échantillonnage	16
11.3	Comparer les stratégies d'échantillonnage	16
12	Guide de construction révisé	16
13	Dictionnaire de notations	17
14	Carte épistémique	18

Références**19**

1 Objet, convention et axiomes

1.1 Le nom exact

L'acronyme TRPM désigne exclusivement :

Théorie relationnelle des positions multiplicatives.

Il ne signifie ni « théorie des rapports purement multiplicatifs », ni « référentiel purement multiplicatif ». Le rapport est un cas de relation ; la théorie peut aussi étudier des opérateurs couplés, à condition de les déclarer séparément et de justifier leur identification depuis les données.

1.2 Convention d'orientation

Pour des positions $P_i, P_j \in (\mathbb{R}_{>0})^d$, la relation orientée de i vers j est fixée une fois pour toutes par

$$R_{ij} = R(P_i, P_j) = P_i^{\odot -1} \odot P_j = \left(\frac{P_{j,k}}{P_{i,k}} \right)_{k=1}^d.$$

Cette convention garantit

$$R_{ij} \odot R_{jk} = R_{ik}, \quad R_{ji} = R_{ij}^{\odot -1}, \quad R_{ii} = \mathbf{1}.$$

1.3 L'univers de 1 vers l'infini

L'univers des grandeurs intrinsèques est

$$\mathbb{U}_\times = \{1\} \cup (1, \infty).$$

Il s'agit d'un monoïde multiplicatif : 1 est l'identité, 0 en est extrait, et ∞ indique une direction d'extension plutôt qu'une position finie. Le sens d'une relation est stocké séparément. Pour une composante,

$$(m_{ij}, \sigma_{ij}), \quad m_{ij} \in \mathbb{U}_\times, \quad \sigma_{ij} \in \{-1, 0, +1\}, \quad r_{ij} = m_{ij}^{\sigma_{ij}}.$$

Ainsi $r_{ij} = 1/2$ ne constitue pas une grandeur primitive située entre 0 et 1 : c'est l'évaluation de la grandeur 2 dans le sens inverse. Le renversement d'une arête conserve m et change σ en $-\sigma$. Cette écriture s'applique composante par composante.

Distinction ontologique

$\mathbb{U}_\times$ décrit les grandeurs de la TRPM. L'ensemble $\mathbb{R}_{>0}$ décrit les facteurs évalués après orientation. La carte $\ell(m, \sigma) = \sigma \log m$ mesure une relation ; elle reste une représentation externe de calcul.

1.4 Quatre principes

1. **Primauté relationnelle.** Les relations observées constituent la donnée première ; les positions sont reconstruites seulement si les contraintes de compatibilité l'autorisent.
2. **Identité sans origine additive.** Le point $C = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ est l'identité multiplicative et le représentant choisi pour reconstruire les positions. Il ne doit pas être assimilé à l'origine 0 d'un espace additif.

3. **Extraction du zéro.** La grandeur intrinsèque appartient à $\mathbb{U}_\times^d$. Le zéro n'est ni une position ni une relation multiplicative ; il constitue au plus une limite extérieure ou un état décrit par une autre structure.
4. **Abstention typée.** Une absence de position globale n'interdit pas nécessairement toute fonctionnelle. Le système doit indiquer précisément si le repère, l'orientation, la forme ou le volume est identifiable ; sinon il retourne $\perp$ pour cet estimand.

Frontière du zéro

Extraire 0 ne revient pas à nier son existence arithmétique. Cela affirme qu'il n'appartient pas à l'univers multiplicatif de la TRPM : il n'a pas d'inverse et ne peut pas être atteint par une composition finie de grandeurs non nulles. Une création, une extinction ou un état nul demanderait donc une extension distincte du modèle.

2 Mesurer l'univers multiplicatif

2.1 La carte logarithmique comme instrument

Pour calculer, on évalue d'abord la relation orientée $r = m^\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$, puis on définit

$$\ell(r) = \log r = \sigma \log m$$

composante par composante. Pour les facteurs évalués,

$$\ell(r \odot s) = \ell(r) + \ell(s)$$

et la métrique

$$d_\times(P, Q) = \|\log R(P, Q)\|_2$$

se calcule comme une distance euclidienne entre mesures. Cette équivalence opératoire ne fait pas de $\mathbb{R}^d$ l'univers intrinsèque de la TRPM : elle donne un instrument fidèle pour composer et mesurer les relations.

L'interpolation géodésique s'écrit

$$\gamma_{P,Q}(t) = P \odot R(P, Q)^t = P^{1-t} \odot Q^t.$$

Le milieu est la moyenne géométrique

$$\gamma_{P,Q}\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{P \odot Q}.$$

Statut scientifique

Le passage $\log(rs) = \log r + \log s$, le calcul multiplicatif, la moyenne géométrique et la métrique log-euclidienne sont standards. La spécificité revendiquée ici est la séparation entre l'univers $1 \rightarrow \infty$, le sens de la relation et leur mesure signée ; ce n'est pas l'invention du logarithme.

2.2 Mesure invariante dans la carte évaluée

Sur les facteurs évalués $(\mathbb{R}_{>0})^d$, la mesure de Haar est

$$d\mu_{\times}(X) = \prod_{k=1}^d \frac{dX_k}{X_k}.$$

Sous $u_k = \log X_k$,

$$d\mu_{\times} = du_1 \cdots du_d.$$

Son invariance sous $X \mapsto \lambda \odot X$ est une invariance de Haar sous translation multiplicative. Elle ne doit pas être confondue avec l'invariance de jauge d'une connexion, ni utilisée pour identifier l'univers intrinsèque au groupe de ses facteurs évalués.

3 Quart de sphère et volume relationnel

3.1 Définition

Dans ce document, l'expression *quart de sphère* désigne le domaine plein délimité par la surface sphérique, et non la seule surface. En dimension trois, la sphère multiplicative pleine de rayon relationnel $\rho > 0$ est

$$\mathcal{S}_{\times}^{\text{plein}}(\rho) = \{(X, Y, Z) > 0 : (\log X)^2 + (\log Y)^2 + (\log Z)^2 \leq \rho^2\}.$$

Le quart étudié est

$$\mathcal{Q}_{\times}(\rho) = \{P \in \mathcal{S}_{\times}^{\text{plein}}(\rho) : X \geq 1, Y \geq 1\}.$$

Le troisième axe reste libre :

$$e^{-\rho} \leq Z \leq e^{\rho}.$$

3.2 Paramétrisation et volume

Avec $0 \leq s \leq \rho$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ et $0 \leq \varphi \leq \pi$,

$$X = \exp(s \sin \varphi \cos \theta),$$

$$Y = \exp(s \sin \varphi \sin \theta),$$

$$Z = \exp(s \cos \varphi).$$

La mesure devient

$$d\mu_{\times} = s^2 \sin \varphi \, ds \, d\varphi \, d\theta.$$

Par conséquent,

$$V_{\times}(\mathcal{Q}_{\times}(\rho)) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho} s^2 \sin \varphi \, ds \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi}{3} \rho^3.$$

Si $K = e^{\rho}$, alors

$$V_{\times} = \frac{\pi}{3} (\log K)^3.$$

Interprétation exacte

Ce volume est celui du domaine plein correspondant à un quart de sphère dans la carte de mesure logarithmique. La TRPM ne retire pas π de la géométrie ; elle peut cependant déplacer π d'une constante fournie à une constante estimée par dénombrement.

3.3 Points numériques pour $K = 2$

On pose

$$\rho = \log 2 \approx 0,693147, \quad V_{\times} \approx 0,348743 \text{ u.r.}_e^3.$$

Point	Coordonnées log	Position multiplicative	$d_{\times}(C, P)$
C	(0, 0, 0)	(1, 1, 1)	0
A	(0,693147, 0, 0)	(2, 1, 1)	ρ
B	(0, 0,693147, 0)	(1, 2, 1)	ρ
N	(0, 0, 0,693147)	(1, 1, 2)	ρ
S	(0, 0, -0,693147)	(1, 1, 2^{-1})	ρ
D	(0,490129, 0,490129, 0)	(1,632527, 1,632527, 1)	ρ
T	(0,346574, 0,346574, 0,490129)	(1,414214, 1,414214, 1,632527)	ρ

4 Tables relationnelles et volume sans coordonnées absolues**4.1 La table des relations**

Une table relationnelle peut être stockée sous forme matricielle ou comme liste d'arêtes orientées. Les deux représentations sont mathématiquement équivalentes. Chaque ligne contient une origine i , une destination j , une relation R_{ij} , une incertitude et, le cas échéant, une provenance.

Relation	k_X	k_Y	k_Z	$d_{\times}$	Rôle
$R(C, A)$	2	1	1	0,693147	générateur X
$R(C, B)$	1	2	1	0,693147	générateur Y
$R(C, N)$	1	1	2	0,693147	générateur $Z+$
$R(C, S)$	1	1	2^{-1}	0,693147	sens inverse en Z
$R(C, D)$	1,632527	1,632527	1	0,693147	diagonale XY
$R(A, B)$	2^{-1}	2	1	0,980258	corde $A \rightarrow B$
$R(A, D)$	$1,225095^{-1}$	1,632527	1	0,530452	corde $A \rightarrow D$

Les composantes écrites avec un exposant -1 sont des facteurs évalués dans le sens inverse. La grandeur intrinsèque stockée reste respectivement 2 ou 1,225095, accompagnée de son orientation négative.

La composition numérique vérifie

$$R(C, A) \odot R(A, D) = R(C, D)$$

et la fermeture du triangle plat donne

$$R(C, A) \odot R(A, D) \odot R(D, C) = \mathbf{1}.$$

4.2 Volume tétraédrique relationnel

Pour un simplexe $\sigma = (P_0, P_1, P_2, P_3)$, posons

$$L_k = \log R(P_0, P_k), \quad k = 1, 2, 3.$$

Alors

$$\Delta V_{\times}(\sigma) = \frac{1}{6} |\det(L_1, L_2, L_3)|.$$

Cette expression ne dépend que des relations. Elle est invariante sous le changement global de représentant $P_i \mapsto \lambda \odot P_i$.

Antécédent

Le déterminant est la formule euclidienne standard du volume d'un simplexe. Le principe plus général « reconstruire un volume depuis des données par paires » appartient à la géométrie des distances et au déterminant de Cayley–Menger. Pour des distances symétriques d_{ij} , celui-ci donne

$$\text{Vol}_d^2 = \frac{(-1)^{d+1}}{2^d (d!)^2} \det(\text{CM}(d_{ij}^2)).$$

La formule TRPM n'est donc pas un nouveau principe de volume relationnel : elle reconstruit des vecteurs orientés en coordonnées logarithmiques puis applique leur déterminant. Elle demande plus d'information que Cayley–Menger, qui n'utilise que les distances symétriques, mais conserve en contrepartie l'orientation et la loi de composition des arêtes.

5 Dénombrement et estimation de pi

Pour $q = K^{1/n}$, les points du réseau sont

$$P_{ijk} = (q^i, q^j, q^k), \quad i, j \geq 0, \quad -n \leq k < n.$$

Le pas logarithmique vaut

$$\delta = \log q = \frac{\log K}{n}.$$

Si N_n cellules ont leur centre dans le quart de sphère plein,

$$V_n = N_n \delta^3 \quad \text{et} \quad \Pi_n = \frac{3V_n}{(\log K)^3} = \frac{3N_n}{n^3}.$$

Le rayon K se simplifie : la constante estimée dépend uniquement du dénombrement et de la résolution.

n	N_n	$V_n (\mathbf{u.r.}_e^3)$	$\Pi_n = 3N_n/n^3$
8	544	0,353839	3,187500
16	4 314	0,350749	3,159668
32	34 344	0,349042	3,144287
128	2 195 962	0,348716	3,141349

Limite de l'expérience

Le réseau q^i devient une grille régulière dans la carte logarithmique. Cette expérience estime donc π par une somme de Riemann sur le domaine plein d'une sphère euclidienne. Elle mesure correctement la constante, mais ne constitue pas une nouvelle définition de π .

6 Reconstruction, torsor et holonomie

6.1 Relations évaluées comme 1-cochaîne

Soit un complexe cellulaire $K = (V, E, F, \dots)$. Une table de relations scalaires évaluées est une 1-cochaîne

$$R : E \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0})^d$$

vérifiant $R_{ji} = R_{ij}^{\odot -1}$. Pour un chemin $\gamma : i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_m$, son transport est

$$R(\gamma) = R_{i_0 i_1} \odot \dots \odot R_{i_{m-1} i_m}.$$

Pour un cycle C ,

$$H_C = R(C)$$

est son holonomie multiplicative.

Si $H_C = \mathbf{1}$ pour tous les cycles, le choix d'un représentant P_o permet de poser

$$P_i = P_o \odot R(\gamma_{o \rightarrow i}),$$

indépendamment du chemin. Un autre choix $P'_o = \lambda \odot P_o$ produit

$$P'_i = \lambda \odot P_i.$$

La solution est donc une classe de jauge, ou un torsor, et non une famille de positions absolues.

6.2 Flatitude locale et holonomie globale

Distinction topologique

La courbure nulle donne une connexion localement plate. Elle ne garantit pas à elle seule un repère parallèle global : un domaine non simplement connexe peut porter une connexion plate avec monodromie non triviale. Un repère global est assuré lorsque l'holonomie de toutes les boucles est triviale, sous les hypothèses usuelles de connexité.

6.3 Fermeture exacte sur un réseau cohérent

Observable	Résultat
Statut	[SLIT]
Résolution radiale	$n = 32$
Points reconstruits	70 785
Relation élémentaire q	1,0218971487
Pas logarithmique	0,0216608494
Erreur maximale de fermeture	$2,22 \times 10^{-16}$
Cellules intérieures	34 344
Volume relationnel	0,3490417068
Constante estimée	3,1442871094

Le changement de représentant $(1, 1, 1) \mapsto (3, 5, 7)$ conserve le nombre de cellules et le volume. Cela valide l'invariance attendue dans le cas plat.

7 Du rapport orienté à l'opérateur couplé

7.1 Deux familles à ne pas confondre

Dans la couche initiale, une relation orientée $(m, \sigma) \in \mathbb{U}_\times^d \times \{-1, 0, +1\}^d$ est évaluée en $R = m^\sigma$ et compose une position par

$$X \mapsto R \odot X.$$

Dans la carte de mesure $u = \log X$, cette composition se calcule par

$$u \mapsto u + \log R.$$

Cette translation est l'image calculatoire de la composition multiplicative ; elle ne définit pas l'univers. Les rapports composante par composante commutent.

Un opérateur couplé peut, dans la même carte de calcul, être représenté par une matrice M :

$$u \mapsto Mu.$$

Après retour à l'écriture multiplicative,

$$X'_i = \prod_{j=1}^d X_j^{M_{ij}}.$$

Il s'agit d'une loi de puissance couplée, et non d'un rapport composante par composante. Son admission demande donc une extension explicite de la relation TRPM initiale.

7.2 Carte de calcul et opérateurs distincts

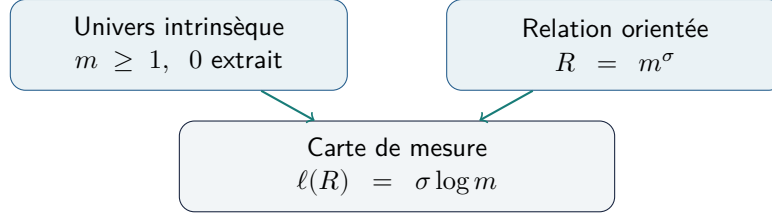
Lorsque le protocole expérimental comporte simultanément un couplage et un transport, leur représentation locale peut prendre la forme

$$u' = Mu + t, \quad M \in GL(d), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Dans l'écriture multiplicative évaluée :

$$X'_i = e^{t_i} \prod_{j=1}^d X_j^{M_{ij}}.$$

Cette formule est un modèle d'opérateur dans une carte de mesure. Elle ne constitue ni le groupe intrinsèque de la TRPM, ni une preuve que toute matrice est admissible dans l'univers $1 \rightarrow \infty$. La classe des opérateurs permis doit être définie par les données et par les grandeurs qu'ils préservent.



Conséquence

La non-commutativité de l'expérience matricielle provient des opérateurs couplés, non des rapports orientés initiaux. Ajouter ces opérateurs est une extension explicite du modèle ; les représenter par $u' = Mu + t$ ne change pas la nature de l'univers multiplicatif.

7.3 Quand les données autorisent-elles une matrice ?

Une seule paire (u, v) ne permet pas d'identifier M et t dans

$$v = Mu + t.$$

Il existe une infinité de solutions. Il faut observer plusieurs transitions

$$v_s = Mu_s + t + \varepsilon_s, \quad s = 1, \dots, N.$$

L'identifiabilité de cet opérateur exige notamment

$$\text{rang} \begin{pmatrix} u_1^\top & 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_N^\top & 1 \end{pmatrix} = d + 1.$$

En dimension trois, au moins quatre états sources indépendants dans la carte de calcul sont nécessaires en régime exact, et davantage sous bruit.

Le passage rapport $\rightarrow$ matrice doit donc être autorisé par :

1. des transitions répétées sur des états sources indépendants ;
2. un rang expérimental suffisant ;
3. une amélioration démontrée par rapport au modèle de translation ;
4. une estimation de l'incertitude de M et t ;
5. une validation hors échantillon ou sur données [SLIT] à vérité connue.

8 Holonomie matricielle, forme et volume

8.1 Quand le chemin modifie la reconstruction

Une perturbation d'arête par e^ε , avec $\varepsilon = 0,05$, produit dans l'exemple :

$$H_C = (1, e^{0,05}, 1) \neq \mathbf{1}.$$

Deux chemins vers le même sommet donnent alors des positions et des volumes différents :

Chemin	Volume reconstruit
$C \rightarrow A \rightarrow D$	0,0001709654
$C \rightarrow B \rightarrow D$	0,0001084065
Écart relatif	57,71 %

Dans la couche ratio seulement, ce test justifie :

$$H_C \neq \mathbf{1} \implies \text{pas de position globale univoque.}$$

Le volume global ne doit pas être choisi arbitrairement entre les chemins.

8.2 Déformation du repère et conservation du volume

Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $AB \neq BA$ et

$$H = ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Ainsi,

$$H \neq I, \quad \det H = 1.$$

Le transport cisaille le repère mais conserve la forme volume.

Pour des familles proches de l'identité,

$$A(\delta) = e^{\delta a}, \quad B(\delta) = e^{\delta b},$$

le commutateur vérifie

$$A(\delta)B(\delta)A(\delta)^{-1}B(\delta)^{-1} = I + \delta^2[a, b] + O(\delta^3).$$

Le défaut non commutatif apparaît donc au second ordre.

8.3 Observables d'holonomie

Pour $H_C \in GL(d)$, on sépare :

$$h_V(C) = \log |\det H_C|, \quad s_O(C) = \text{sgn}(\det H_C),$$

et

$$H_C^{\text{forme}} = |\det H_C|^{-1/d} H_C, \quad |\det H_C^{\text{forme}}| = 1.$$

La décomposition infinitésimale est

$$\mathfrak{gl}(d) = \mathfrak{sl}(d) \oplus \mathbb{R}I.$$

Le déterminant observe la composante scalaire et ignore les commutateurs, qui ont déterminant 1.

8.4 Régimes corrigés

Les conclusions doivent porter sur le groupe entier d'holonomie $\mathcal{H} = \text{Hol}(\nabla)$, et non sur un seul cycle.

Condition	Repère	Volume	Conclusion
$\mathcal{H} = \{I\}$	global	orienté et global	monodromie triviale ; reconstruction complète
$\mathcal{H} \subset SL(d),$ $\mathcal{H} \neq \{I\}$	non global	forme volume parallèle	géométrie équi-affine ; forme locale variable
$\mathcal{H} \subset SL^\pm(d)$, signe non fixé	non global	volume absolu conservé	orientation potentiellement inversée
$\exists H \in \mathcal{H} :$ $ \det H \neq 1$	non global	non préservé par la connexion	une forme volume peut exister, mais elle n'est pas parallèle pour ce transport

Cadre standard

Les connexions préservant une forme volume appartiennent à la géométrie équi-affine. Le déterminant agit sur le fibré déterminant Λ^d , tandis que la partie unimodulaire appartient à $SL^\pm(d)$. Ces faits relèvent de la théorie standard des connexions et de l'holonomie ; l'exemple du commutateur en est une instantiation calculée.

9 De la cohérence à l'admissibilité par estimand

9.1 Représentation, approximation et diagnostic d'une table réciproque

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice positive réciproque :

$$a_{ji} = a_{ij}^{-1}, \quad a_{ii} = 1.$$

Dans le modèle de Saaty, la cohérence exacte signifie qu'il existe un vecteur de priorités $w > 0$ tel que

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}.$$

Elle équivaut à la fermeture multiplicative $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ et, pour une matrice complète, à $\lambda_{\max} = n$. Lorsque la matrice est incohérente, l'AHP conserve le vecteur propre principal

$$Aw = \lambda_{\max} w$$

comme approximation et mesure l'écart par

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \quad CR = \frac{CI}{RI},$$

où RI dépend de la convention de matrices aléatoires utilisée.

Correction importante

Il serait inexact d'écrire que Saaty « rend toujours une réponse » sans réserve. L'algorithme calcule bien un vecteur de Perron pour toute matrice positive, mais le diagnostic CR peut conduire le praticien à réviser ou rejeter les jugements. Le seuil usuel de cohérence est une règle de méthode, non un théorème universel d'admissibilité.

La différence recherchée pour la TRPM est donc plus étroite : faire de $\perp_F$ une valeur typée du codomaine de chaque estimand F , et non seulement un avertissement global attaché à la matrice d'entrée.

9.2 Des comparaisons locales aux reconstructions globales

La chaîne historique pertinente est la suivante :

1. **Saaty** : ratios réciproques, priorité de Perron et indice de cohérence ;
2. **Magnot 2018** : correspondance explicite entre comparaisons par paires, jauge discrétisée et holonomie sur les arêtes d'un simplexe ;
3. **Magnot 2019** : coefficients dans un groupe arbitraire, incohérence comme holonomie non triviale et exemples non abéliens ;
4. **Magnot 2023 et 2026** : matrices aléatoires, réduction d'incohérence, puis compatibilité projective de structures relationnelles multi-échelles ;
5. **HodgeRank, synchronisation et SLAM** : projection, estimation robuste et optimisation d'états globaux depuis des contraintes locales.

Ces antécédents interdisent de présenter la détection d'incohérence, l'holonomie, la correction robuste ou le refus de certaines données comme des inventions isolées de la TRPM. Le déplacement possible porte sur la question posée : non plus seulement « quelle reconstruction minimise l'incohérence ? », mais « quel objet précis ai-je le droit de reconstruire ? ».

9.3 Critère déterministe relatif à l'estimand

Soit $\mathcal{H}$ le sous-groupe d'holonomie engendré par les cycles observables :

$$\mathcal{H} = \langle H_C : C \in \mathcal{C} \rangle.$$

À chaque estimand F , associons son stabilisateur

$$\text{Stab}(F) = \{g \in G : F(g \cdot x) = F(x) \text{ pour tout } x\}.$$

Le critère déterministe proposé est

$$\boxed{\text{Adm}_F(\mathcal{H}) = 1 \iff \mathcal{H} \subseteq \text{Stab}(F).}$$

Principe d'admissibilité relative

Un jeu de relations n'est pas admissible ou inadmissible en soi. Il l'est relativement à un estimand F . Une holonomie peut interdire un repère global tout en laissant identifiable une orientation, une métrique ou un volume.

Dans la couche linéaire $G \subseteq GL(d)$, cette règle donne :

Estimand F	Stabilisateur requis	Lecture
Position ou repère exact	$\{I\}$	toute holonomie non triviale interdit le représentant global exact
Métrique euclidienne	$O(d)$	rotations et réflexions conservent les distances
Orientation	$GL^+(d) = \{H : \det H > 0\}$	une déformation peut être admise si elle ne renverse pas l'orientation
Volume orienté	$SL(d) = \{H : \det H = 1\}$	cisaillements admis, dilatations et inversions rejetées
Volume absolu	$SL^\pm(d) = \{H : \det H = 1\}$	une inversion d'orientation reste compatible avec la mesure absolue
Tenseur ou forme T	$\text{Stab}(T) = \{H : H \cdot T = T\}$	le groupe admissible dépend de l'objet effectivement demandé

Il ne s'agit pas d'une simple échelle linéaire. Les stabilisateurs forment un **ordre partiel**. La relation

$$\text{Stab}(F_1) \subseteq \text{Stab}(F_2)$$

implique que l'admissibilité de F_1 entraîne celle de F_2 . En revanche, $O(d)$ et $SL(d)$ ne sont pas comparables : une réflexion préserve la métrique mais pas le volume orienté ; un cisaillement unimodulaire préserve le volume mais pas la métrique.

9.4 Version bruitée : décision ternaire et règle d'arrêt

Pour chaque cycle C , définissons le défaut relatif à F :

$$D_F(C) = \text{dist}(H_C, \text{Stab}(F)).$$

Soit $[L_F(C), U_F(C)]$ un intervalle simultané de confiance pour ce défaut, et τ_F une tolérance fixée avant l'observation. Une décision ternaire possible est

$$\mathcal{D}_F = \begin{cases} A_F, & \text{si } \max_C U_F(C) \leq \tau_F, \\ N_F, & \text{si } \exists C : L_F(C) > \tau_F, \\ U_F, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où A_F signifie admissible, N_F non-admissibilité établie et U_F information insuffisante. La sortie devient

$$\widehat{F} = \begin{cases} \widehat{F}_{\text{reconstruit}}, & \mathcal{D}_F = A_F, \\ \perp_F^{\text{incompatibilité}}, & \mathcal{D}_F = N_F, \\ \perp_F^{\text{insuffisance}}, & \mathcal{D}_F = U_F. \end{cases}$$

Cette règle évite de confondre trois situations : objet identifié, obstruction géométrique établie et manque de puissance. Sa calibration exige une base de cycles définie à l'avance, un bootstrap à domaine gelé, un contrôle des tests multiples et une étude [SLIT] sur données à vérité connue.

9.5 Origine interne et statut scientifique

Dans le programme expérimental ÉTR, cette logique provient de la discipline des estimands : un objet non autorisé par le protocole ne doit pas être reconstruit après coup. Le RUN-001 réel a ainsi été conservé sous le statut $[O, \perp]$, tandis que [SLIT] désigne seulement la validation de l'instrument sur données synthétiques. Cette origine méthodologique doit être distinguée des antécédents mathématiques de Saaty et Magnot.

9.6 Le résultat qui reste à établir

Le fait déterministe selon lequel les objets parallèles sont les invariants du groupe d'holonomie est standard. Le candidat propre à la TRPM est sa version statistique, sélective et finie :

Étant données des relations bruitées à valeurs dans G , caractériser les conditions sous lesquelles $\mathcal{H} \subseteq \text{Stab}(F)$ est testable avec un risque contrôlé, et garantir que toute fonctionnelle non identifiable retourne une abstention typée plutôt qu'une projection présentée comme vérité.

À ce stade, il s'agit d'un **programme de théorème**, non d'un théorème acquis. Une contribution scientifique complète exigerait :

1. un modèle probabiliste des arêtes et du mécanisme d'exposition ;
2. des estimands et tolérances définis avant l'observation ;
3. l'identifiabilité du groupe d'holonomie sur le support observé ;
4. des ensembles de confiance simultanés pour $D_F(C)$;
5. des bornes de risque sélectif pour $\widehat{F}$ et $\perp_F$;
6. une validation [SLIT], puis des répliques observationnelles [O] avant toute qualification [EMP].

10 Antécédents et comparaison stricte

La comparaison suivante distingue l'équivalence mathématique, l'analogie d'architecture et l'usage méthodologique. Une même formule peut être standard tandis que sa fonction dans un protocole d'inférence demeure à construire.

Objet TRPM	Antécédent	Correspondance
Positions déterminées à une action globale près	Torseur ou espace principal homogène	Équivalence conceptuelle exacte : un espace qui a oublié le choix d'une identité ou d'une origine.
Table $R_{ij} = w_i^{-1}w_j$	Matrices de comparaisons par paires, Saaty 1977	Équivalence exacte dans le cas scalaire cohérent, à une convention d'orientation près. Le vecteur de Perron fournit une approximation lorsque la fermeture est rompue.
Diagnostic d'une table scalaire	Indices CI et CR de l'AHP	Antécédent direct de l'admissibilité numérique. La TRPM doit s'en distinguer par une décision propre à chaque estimand et par un codomaine contenant $\perp_F$.

Objet TRPM	Antécédent	Correspondance
Arêtes orientées, inversion, cycles	Graphes à gains, Zaslavsky	Exacte au niveau du graphe étiqueté par un groupe.
Relations à valeurs dans un groupe et holonomie	Magnot, 2018, 2019, 2023 et 2026	Antécédent direct : pont jauge-comparaisons, groupes arbitraires, non-commutativité, géométrie probabiliste et compatibilité projective multi-échelles.
Reconstruction bruitée	Synchronisation sur groupes, Singer	Même problème inverse : estimer les états globaux depuis des rapports locaux bruités.
Gradient, cycles locaux et composante globale	HodgeRank, Jiang et al.	Décomposition des flux d'arêtes en gradient, curl et partie harmonique.
Transformations relatives en réseau	Pose-graph SLAM ; graphes de facteurs	Architecture opérationnelle : états aux sommets, contraintes relatives aux arêtes, fermeture de boucle, estimation robuste et optimisation globale.
Holonomie non commutative	Théorie de jauge sur réseau, Wilson	Éléments de groupe sur les liens et produits ordonnés autour des boucles.
Rapports positifs et calcul en log	Aitchison ; métriques log-euclidiennes	Même linéarisation logarithmique, dans des domaines statistiques et matriciels différents.
Volume à partir de relations	Déterminant de Cayley-Menger	Même principe relationnel général, avec des distances symétriques plutôt que des rapports orientés.
Volume préservé sous $SL(d)$	Géométrie équi-affine et théorie de l'holonomie	Classification standard. La nouveauté éventuelle est l'inférence statistique depuis des données relationnelles.
Prix, unités et arbitrage comme transport	Théorie de jauge de la finance, Ilinski	Antécédent du couplage économie-jauge : la courbure code des opportunités d'arbitrage. L'abstention normative d'un estimand économique reste une question distincte.
Admissibilité relative à F	Stabilisateurs et invariants d'holonomie	La base déterministe est standard. Le candidat TRPM est la décision statistique ternaire, typée par estimand, avec contrôle du risque.

Polarisation destructive

Vue depuis ses facteurs évalués, la couche plate rencontre des objets déjà nommés : représentation en torseur positif, carte euclidienne après logarithme, comparaisons par paires, graphe à gains, connexion discrète, holonomie, volume de simplexe et comptage de réseau. Cette comparaison standard ne remplace pas la convention intrinsèque $(m, \sigma) \in \mathbb{U}_\times \times \{-1, 0, +1\}$. L'exemple du commutateur est une instantiation matricielle d'un cadre non abélien déjà couvert par Magnot. Aucun théorème géométrique inédit n'est établi par ces seuls éléments.

Inversion constructive

L'évolution localisable est le passage d'une cohérence globale binaire à une admissibilité indexée par l'estimand et ordonnée par les stabilisateurs. La question n'est plus seulement de corriger la table ou d'optimiser une position, mais de décider, avec un risque contrôlé, quels objets survivent à l'holonomie et lesquels doivent retourner une abstention typée.

11 Nombre d'or : insertion, structure et échantillonnage

Le nombre d'or

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

n'a pas le même statut que π dans le quart de sphère plein.

11.1 Trois niveaux à ne pas confondre

1. **Insertion triviale.** Poser $K = \varphi$, donc $\rho = \log \varphi$, donne

$$V_{\times} = \frac{\pi}{3}(\log \varphi)^3.$$

La constante a été choisie comme entrée ; elle n'a pas émergé.

2. **Symétrie imposée.** Utiliser un pentagone et $2 \cos(\pi/5) = \varphi$ ajoute une symétrie que la sphère isotrope ne privilégie pas. Ce serait une construction valide, mais non une découverte produite par la TRPM.
3. **Interface algébrique.** Le nombre φ est l'unique $q > 1$ vérifiant

$$q^2 = q + 1.$$

Par conséquent, la progression géométrique q^n vérifie aussi la récurrence additive

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2}.$$

Cette propriété lui donne une place légitime dans l'étude du passage entre composition multiplicative et récursivité additive.

Cette troisième propriété n'est pas contenue dans la sphère. Elle exige d'introduire une contrainte de récurrence ou la matrice compagnon

$$C_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{spec}(C_{\varphi}) = \{\varphi, -\varphi^{-1}\}.$$

Elle appartient donc à la couche algébrique et matricielle, non à la couche métrique isotrope.

Statut comparé

π apparaît comme constante de mesure de la rondeur. φ apparaît comme constante d'une récursivité imposée. Dire que les deux « émergent » du même objet effacerait cette différence de niveau.

11.2 La piste défendable : discrédance de l'échantillonnage

Pour une rotation de Kronecker

$$x_n = \{n\alpha\}, \quad \alpha = \varphi^{-1},$$

la fraction continue $[0; 1, 1, 1, \dots]$ rend α extrémale au sens de l'approximation diophantienne de Hurwitz. Cette mauvaise approximation par les rationnels favorise une répartition régulière en dimension un. Elle motive les rotations dorées et certains réseaux de Fibonacci employés en quasi-Monte-Carlo.

Il faut toutefois conserver trois réserves :

- une bonne propriété unidimensionnelle ne prouve pas une optimalité en dimension trois ;
- la discrédance dépend de la famille d'ensembles testée et du nombre fini de points ;
- l'indicatrice du domaine sphérique possède une frontière qui demande une analyse propre ; les bornes usuelles ne donnent pas automatiquement un optimum universel.

11.3 Comparer les stratégies d'échantillonnage

Pour relier honnêtement φ au calcul de π , comparer à budget N identique :

1. la grille cartésienne régulière ;
2. un échantillonnage pseudo-aléatoire ;
3. une suite de Sobol ;
4. une construction à rotation dorée ou réseau de Fibonacci adaptée à trois dimensions.

Mesurer la discrédance choisie, l'erreur

$$E_N = |\hat{\pi}_N - \pi|$$

et sa stabilité sous décalage de la séquence. Si la construction dorée domine sur un domaine de N préenregistré, φ aura le statut de **constante instrumentale d'échantillonnage** [SLIT], non de constante géométrique émergente.

12 Guide de construction révisé

1. **Définir les objets observés.** Sommets, arêtes, cellules, provenance et incertitude.
2. **Fixer l'orientation.** Utiliser $R_{ij} = P_i^{-1}P_j$ et conserver cette convention.
3. **Définir l'univers et les opérateurs.** Utiliser $\mathbb{U}_x^d$ pour les grandeurs, stocker séparément le sens σ , puis déclarer toute loi de puissance couplée comme un opérateur supplémentaire à identifier.
4. **Séparer donnée et représentation.** Les relations sont premières ; le choix $P_o = \mathbf{1}$ est une jauge de reconstruction.
5. **Définir la métrique et la mesure.** $d_x = \|\log R\|_2$ et $d\mu_x = \prod dX_i/X_i$ dans la couche positive.
6. **Définir la structure cellulaire.** Un graphe seul ne décrit pas un intérieur ni un volume.
7. **Établir la ligne de base scalaire.** Pour une table complète de rapports, publier la cohérence exacte, $\lambda_{\max}$, CI et CR avant toute extension TRPM.
8. **Tester les cycles.** Estimer l'holonomie et son incertitude, sans confondre erreur numérique, bruit et obstruction géométrique.

9. **Tester l'identifiabilité.** Une matrice ne peut être inférée depuis une seule paire d'états.
10. **Décomposer l'holonomie.** Séparer échelle h_V , orientation s_O et partie unimodulaire H^{forme} .
11. **Définir les estimands avant les seuils.** Associer à chacun son stabilisateur $\text{Stab}(F)$; position, métrique, orientation et volume exigent des invariances différentes.
12. **Calibrer la décision ternaire.** Distinguer admissibilité, incompatibilité établie et information insuffisante par simulation [SLIT], bootstrap à domaine gelé et contrôle du risque.
13. **Typier l'abstention.** Enregistrer $\perp_F^{\text{incompatibilité}}$ ou $\perp_F^{\text{insuffisance}}$, sans les confondre.
14. **Publier le statut.** Distinguer résultat standard, ré-instanciation, méthode proposée, [SLIT], [O] et [EMP].

13 Dictionnaire de notations

Donnée	Symbole	Unité	Interprétation
Grandeur intrinsèque	$m \in \mathcal{U}_x = [1, \infty)$	facteur	extension depuis l'identité 1
Identité	1	aucune	centre multiplicatif, distinct de 0
Sens relationnel	$\sigma \in \{-1, 0, +1\}$	orientation	direct, identité ou inverse
Facteur évalué	$R_{ij} = m_{ij}^{\sigma_{ij}}$	facteur	transport orienté de i vers j
Mesure log	$\ell(R) = \log R = \sigma \log m$	u.r. _e	carte de calcul, non ontologie
Métrique	$d_x(P, Q)$	u.r. _e	norme de $\log R(P, Q)$
Rayon	$\rho = \log K$	u.r. _e	rayon en espace log
Mesure	$d\mu_x = \prod dX_i/X_i$	u.r. _e ^d	mesure de Haar
Holonomie	H_C	groupe	défaut de fermeture d'un cycle
Holonomie volumique	$h_V = \log \det H_C $	log-facteur	dérive d'échelle
Signe d'orientation	$s_O = \text{sgn} \det H_C$	aucune	conservation ou inversion
Part de forme	H_C^{forme}	aucune	partie de déterminant absolu 1
Opérateur couplé	$\mathcal{T}_{M,t}$	modèle	représentation locale $u \mapsto Mu + t$
Stabilisateur	$\text{Stab}(F)$	sous-groupe	transformations invisibles pour F
Défaut relatif	$D_F(C)$	distance	écart de H_C au stabilisateur
Décision	$\mathcal{D}_F$	statut	admissible, incompatibilité ou insuffisance
Abstention	$\perp_F$	aucune	sortie typée propre à l'estimand F
Validation synthétique	[SLIT]	statut	données synthétiques à vérité connue
Observation	[O]	statut	résultat sur données observées
Confirmation	[EMP]	statut	réplication indépendante qualifiée

14 Carte épistémique

Résultat	Statut	Commentaire
Logarithme, métrique, moyenne géométrique	Standard	Isomorphisme multiplicatif-additif et géométrie log-euclidienne.
Mesure $\prod dX_i/X_i$	Standard	Mesure de Haar du groupe positif.
Volume $\pi\rho^3/3$	Standard	Volume du domaine plein d'un quart de sphère dans la carte de mesure.
Estimation de π par cellules	Standard instrumenté	Somme de Riemann sur réseau uniforme après logarithme.
Reconstruction plate	Standard instrumenté	Exactitude d'une 1-cochaîne ; synchronisation parfaite.
Table scalaire cohérente et vecteur de Perron	Standard, Saaty	Comparaisons réciproques, cohérence et approximation par priorité principale.
Rapports $\rightarrow$ matrices	Extension explicite	Ajout d'opérateurs couplés, distincts de l'univers multiplicatif intrinsèque.
Split échelle, orientation, forme	Standard	Fibré déterminant, géométrie équi-affine et holonomie.
Identification de M, t depuis les données	Problème d'estimation	Exige répétitions, rang et incertitude.
$\mathcal{H} \subseteq \text{Stab}(F)$	Standard reformulé	Les invariants d'holonomie dépendent du stabilisateur de l'objet demandé.
Décision ternaire et $\perp_F$ typé	Candidat méthodologique	Doit être distingué du CR de Saaty, de la consistencisation et du rejet d'arêtes.
Garanties statistiques d'invariance sous holonomie incertaine	Terrain de recherche	Formulation, preuves et validation observationnelle encore à produire.
φ comme paramètre d'échantillonnage	Hypothèse [SLIT]	Comparaison préenregistrée avec grille, pseudo-aléatoire et Sobol ; aucune optimalité universelle revendiquée.

Conclusion

La TRPM n'est pas une nouvelle géométrie multiplicative plate. Elle peut devenir un cadre d'inférence relationnelle si elle formalise le passage des rapports orientés aux opérateurs couplés, estime l'holonomie depuis des données bruitées et attribue à chaque estimand une décision ternaire d'admissibilité, d'incompatibilité ou d'insuffisance. Son évolution propre ne serait pas une nouvelle formule de volume, mais une règle d'arrêt typée et contrôlée.

Références

- [1] J. Aitchison, *The Statistical Analysis of Compositional Data*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 44(2), 1982, p. 139-177. [JSTOR 2345821](#).
- [2] T. Ando, C.-K. Li et R. Mathias, *Geometric Means*, Linear Algebra and its Applications, 385, 2004, p. 305-334. [doi:10.1016/j.laa.2003.11.019](#).
- [3] V. Arsigny, P. Fillard, X. Pennec et N. Ayache, *Log-Euclidean Metrics for Fast and Simple Calculus on Diffusion Tensors*, Magnetic Resonance in Medicine, 56(2), 2006, p. 411-421. [doi:10.1002/mrm.20965](#).
- [4] A. Cayley, *On a Theorem in the Geometry of Position*, Cambridge Mathematical Journal, 2, 1841, p. 267-271. [édition Cambridge des œuvres réunies](#).
- [5] F. Dellaert et M. Kaess, *Factor Graphs for Robot Perception*, Foundations and Trends in Robotics, 6(1-2), 2017, p. 1-139. [doi:10.1561/23000000043](#).
- [6] M. Grossman et R. Katz, *Non-Newtonian Calculus*, Lee Press, 1972.
- [7] A. Hurwitz, *Ueber die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche*, Mathematische Annalen, 39, 1891, p. 279-284. [doi:10.1007/BF01206656](#).
- [8] K. N. Ilinski, *Gauge Geometry of Financial Markets*, Journal of Physics A: Mathematical and General, 33(1), 2000, p. L5-L14. [doi:10.1088/0305-4470/33/1/102](#).
- [9] X. Jiang, L.-H. Lim, Y. Yao et Y. Ye, *Statistical Ranking and Combinatorial Hodge Theory*, Mathematical Programming, 127, 2011, p. 203-244. [doi:10.1007/s10107-010-0419-x](#).
- [10] S. Kobayashi et K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, volumes I et II, Wiley, 1963 et 1969.
- [11] J.-P. Magnot, *A Mathematical Bridge between Discretized Gauge Theories in Quantum Physics and Approximate Reasoning in Pairwise Comparisons*, Advances in Mathematical Physics, 2018. [doi:10.1155/2018/7496762](#).
- [12] J.-P. Magnot, *On Mathematical Structures on Pairwise Comparisons Matrices with Coefficients in an Abstract Group Arising from Quantum Gravity*, Heliyon, 5(6), 2019, e01821. [doi:10.1016/j.heliyon.2019.e01821](#).
- [13] J.-P. Magnot, *On Random Pairwise Comparisons Matrices and Their Geometry*, arXiv:2312.00001, 2023. [arXiv:2312.00001](#).
- [14] J.-P. Magnot, J. Mazurek et V. Čerňanová, *A Gradient Method for Inconsistency Reduction of Pairwise Comparisons Matrices*, International Journal of Approximate Reasoning, 152, 2023, p. 46-58. [doi:10.1016/j.ijar.2022.10.005](#).
- [15] J.-P. Magnot, *Pairwise-Comparison-Valued Cosurfaces: A Projective Framework for Multi-Scale Relational Structures*, prépublication, arXiv:2605.02931, 2026. [arXiv:2605.02931](#).
- [16] K. Menger, *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Mathematische Annalen, 100, 1928, p. 75-163. [EuDML 159284](#).
- [17] H. Niederreiter, *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 63, SIAM, 1992. [doi:10.1137/1.9781611970081](#).
- [18] K. Nomizu et T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge University Press, 1994.
- [19] T. L. Saaty, *A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures*, Journal of Mathematical Psychology, 15(3), 1977, p. 234-281. [doi:10.1016/0022-2496\(77\)90033-5](#).
- [20] T. L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, 1980.
- [21] A. Singer, *Angular Synchronization by Eigenvectors and Semidefinite Programming*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 30(1), 2011, p. 20-36. [doi:10.1016/j.acha.2010.02.001](#).
- [22] K. G. Wilson, *Confinement of Quarks*, Physical Review D, 10, 1974, p. 2445-2459. [doi:10.1103/PhysRevD.10.2445](#).
- [23] T. Zaslavsky, *Biased Graphs. I. Bias, Balance, and Gains*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 47(1), 1989, p. 32-52. [doi:10.1016/0095-8956\(89\)90005-2](#).