

Comparaison entre le référentiel additif et le référentiel relationnel multiplicatif

1. Objectif

L'objectif est de démontrer que deux couples de points, possédant des coordonnées différentes et appartenant à deux référentiels distincts, peuvent produire la même distance.

Dans le référentiel additif, la relation entre deux coordonnées est une différence.

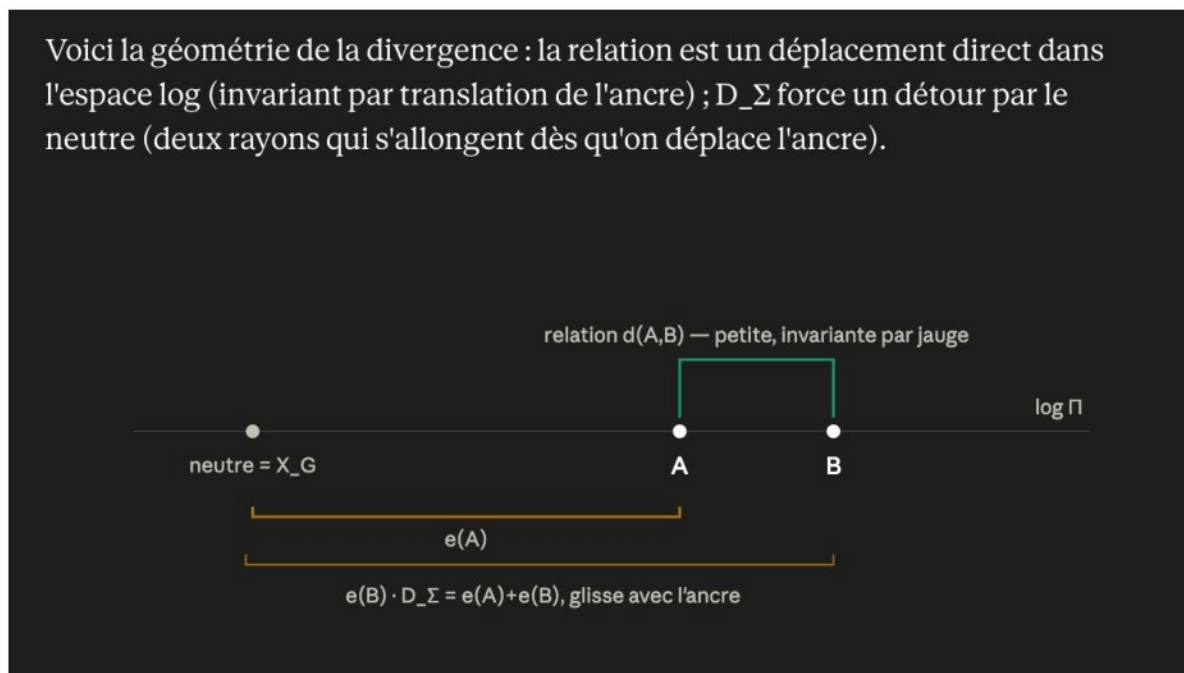
Dans le référentiel relationnel multiplicatif, la relation entre deux coordonnées est un rapport. Le logarithme permet ensuite de transformer ce rapport en une longueur géométrique.

La correspondance recherchée est donc :

$$d+(A+, B+) = d\times(A\times, B\times)$$

I/ Simple sur référentiel additif

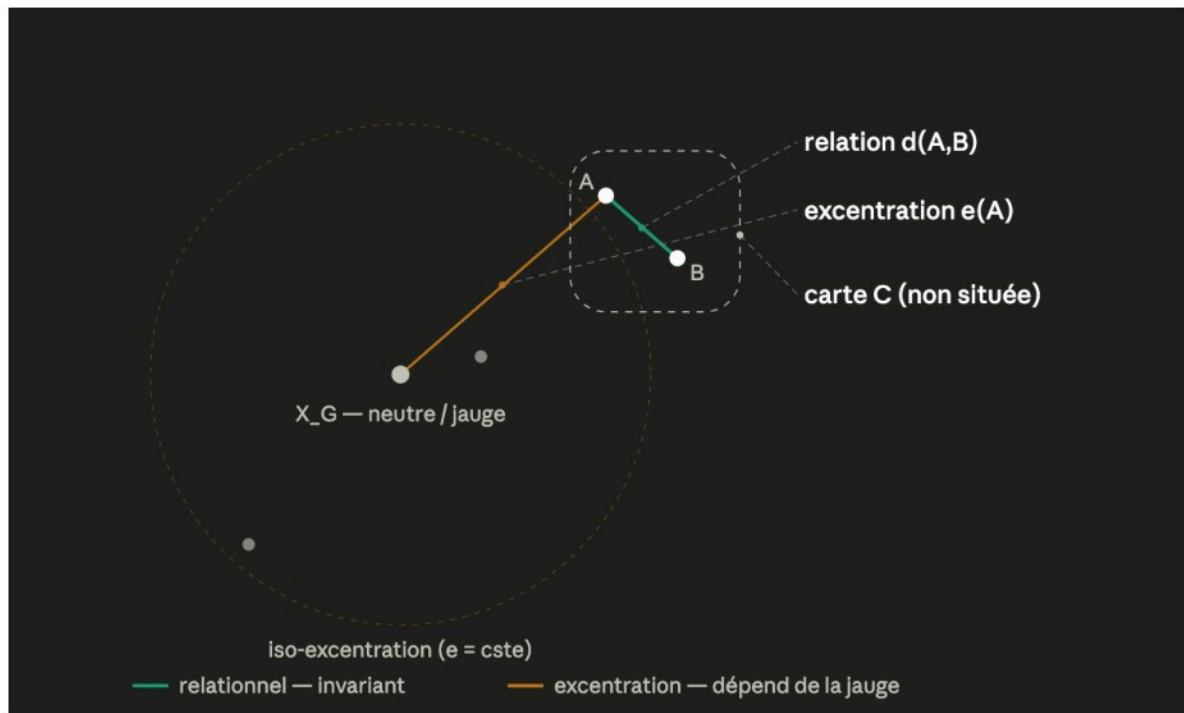
Voici la géométrie de la divergence : la relation est un déplacement direct dans l'espace log (invariant par translation de l'ancre) ; D_Σ force un détour par le neutre (deux rayons qui s'allongent dès qu'on déplace l'ancre).



II/ référentiel multiplicatif

La relation est invariante par jauge du document 34, la moitié correcte du document 35 (la carte n'est pas située, on l'évalue par ses pintones), pose le neutre comme le centroïde global X_G — et rétrograde D_Σ . Le tout se lit dans une seule géométrie : une carte de l'espace logarithmique où X_G est le centre, l'excentration est un rayon, et la relation est une

corde.



Le centre X_G n'est pas un point spécial « 1 » choisi arbitrairement : c'est le centroïde du référentiel global, la **jauge partagée** que tous les utilisateurs habitent — le seul ancrage que le document 34 §8 rend nécessaire. A et B sont deux pintones tous deux *hors* de l'anneau (excentriques) mais reliés par une corde *courte* : c'est ton cas 1000/1100. La corde teal — la relation $d(A,B) = \|\log(\Pi(B)/\Pi(A))\|$ — ne bouge pas si tu déplaces X_G ; c'est la vraie proximité, elle pilote la navigation. Le rayon ambre — l'excentration $e(A) = \|\log(\Pi(A)/X_G)\|$ — bouge si tu déplaces l'ancre ; ce n'est pas une distance entre A et B, c'est un *prior* par pintone (atypicité relative à la population). Le document 35 avait raison de sentir que l'excentration compte, mais il l'a additionnée en croyant fabriquer une distance ; ici elle reste ce qu'elle est : un rayon, pas une corde. Et la carte C est une **enceinte tiritée**, pas un point : elle contient des pintones situés, on l'évalue par eux, on ne lui attribue jamais de position.

Elle n'existe que là où l'holonomie s'annule. Une carte plane suppose que toute chaîne de relations se referme — $R_{\{A \rightarrow B\}} \odot R_{\{B \rightarrow C\}} \odot R_{\{C \rightarrow A\}} = 1$, soit en log une somme de cycle nulle. Là où $\mathcal{H}(C) \neq 1$, aucune assignation de positions absolues n'explique toutes les relations observées : il n'y a pas de carte, seulement des arêtes. C'est pourquoi la modélisation la plus vraie n'est pas « chaque pintone a des coordonnées » mais « les positions sont l'ombre intégrable des relations » — elles existent sur le sous-fibré où le cycle ferme, et cèdent la place aux relations pures ailleurs. La carte ci-dessus est la vue du régime

intégrable ; c'est une projection, pas le fond.

$$\boxed{\Pi(p) \in \mathbb{R}_+^d} \quad \text{jauge : } \tilde{\Pi} = \Pi \otimes X_G \quad (\Leftrightarrow X_G \mapsto \mathbf{1})$$

$$\boxed{R_{i \rightarrow j} = \Pi(p_j) \otimes \Pi(p_i)} \quad \Pi(p_j) = \Pi(p_i) \odot R_{i \rightarrow j}$$

$$\boxed{d(i, j) = \|\log(\Pi(p_j)/\Pi(p_i))\|_w} \quad \text{invariante par jauge, vraie métrique } (d(A, A) = 0)$$

$$\boxed{e_{X_G}(p) = \|\log(\Pi(p)/X_G)\|} \quad \text{prior d'excentration — jamais une distance entre deux pintones}$$

$$\boxed{S_\tau(\text{src}, Q) = \exp\left(-\sum_f w_f m_f \left| \log \frac{\Pi_Q^{(f)}/\Pi_{\text{src}}^{(f)}}{\tau_f} \right| / \sum_f w_f m_f\right)} \quad d \text{ est le cas } \tau = 1$$

$$\boxed{\Pi(C) \text{ indéfini}} \quad S(q, C) = \max_{p \in C} \exp(-\lambda d(q, p)) \quad (\text{existentiel}) \text{ ou moyenne pondérée (collectif)}$$

$$\boxed{\odot_{\text{cycle}} R = \mathbf{1} \iff \mathcal{K}(C) = \mathbf{1} \iff \text{la carte existe}}$$

2. Calcul dans le référentiel additif

Les deux positions choisies sont :

$$A+ = (2 ; 3 ; 5)$$

$$B+ = (5 ; 6,2 ; 7,4)$$

Le déplacement entre les deux points est obtenu par différence coordonnée par coordonnée :

$$B+ - A+ = (5 - 2 ; 6,2 - 3 ; 7,4 - 5)$$

Donc :

$$\delta = (3 ; 3,2 ; 2,4)$$

La distance euclidienne est :

$$d+(A+, B+) = \sqrt{3^2 + 3,2^2 + 2,4^2}$$

Les carrés valent :

$$3^2 = 9$$

$$3,2^2 = 10,24$$

$$2,4^2 = 5,76$$

Leur somme vaut :

$$9 + 10,24 + 5,76 = 25$$

Par conséquent :

$$d+(A+, B+) = \sqrt{25} = 5$$

Le couple de positions additives produit donc une distance égale à 5.

3. Pourquoi les rapports bruts ne constituent pas une distance

Dans le référentiel multiplicatif, la relation élémentaire entre deux coordonnées positives a et b est :

$$b \div a$$

Ce rapport répond à la question :

« Par quel nombre faut-il multiplier a pour obtenir b ? »

Cependant, les rapports bruts ne peuvent pas être directement traités comme les composantes d'une distance euclidienne.

Lorsque les deux points sont identiques, les trois rapports valent 1 :

$$A \div A = (1 ; 1 ; 1)$$

Une norme appliquée directement à ces rapports donnerait :

$$\sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{3}$$

Or la distance d'un point à lui-même doit être égale à 0.

Le logarithme résout cette difficulté, car :

$$\ln(1) = 0$$

La distance relationnelle multiplicative correcte est donc calculée à partir des logarithmes des rapports :

$$d_x(A_x, B_x) = \sqrt{[\ln^2(B_{x_1} \div A_{x_1}) + \ln^2(B_{x_2} \div A_{x_2}) + \ln^2(B_{x_3} \div A_{x_3})]}$$

4. Construction des coordonnées multiplicatives

Le déplacement obtenu dans le référentiel additif est :

$$\delta = (3 ; 3,2 ; 2,4)$$

Pour retrouver la même distance dans le référentiel multiplicatif, les logarithmes des rapports doivent reproduire ces trois composantes :

$$\ln(B_{x_1} \div A_{x_1}) = 3$$

$$\ln(B_{x_2} \div A_{x_2}) = 3,2$$

$$\ln(B_{x_3} \div A_{x_3}) = 2,4$$

Cela signifie que les rapports multiplicatifs doivent être :

$$B_{x_1} \div A_{x_1} = e^3$$

$$B_{x_2} \div A_{x_2} = e^{3,2}$$

$$B_{x_3} \div A_{x_3} = e^{2,4}$$

Une construction naturelle consiste à exponentier les coordonnées du référentiel additif :

$$A_x = \exp(A_+)$$

$$B_x = \exp(B_+)$$

L'exponentiation est appliquée séparément à chaque coordonnée.

On obtient :

$$A_x = (e^2 ; e^3 ; e^5)$$

$$B_x = (e^5 ; e^{6,2} ; e^{7,4})$$

Numériquement :

$$A_x \approx (7,39 ; 20,09 ; 148,41)$$

$$B_x \approx (148,41 ; 492,75 ; 1\,635,98)$$

Les coordonnées du référentiel multiplicatif sont donc différentes des coordonnées du référentiel additif.

5. Calcul des rapports multiplicatifs

Sur la première dimension :

$$e^5 \div e^2 = e^3$$

Sur la deuxième dimension :

$$e^{6.2} \div e^3 = e^{3.2}$$

Sur la troisième dimension :

$$e^{7.4} \div e^5 = e^{2.4}$$

Le vecteur des rapports multiplicatifs est donc :

$$B_x \div A_x = (e^3 ; e^{3.2} ; e^{2.4})$$

Numériquement :

$$B_x \div A_x \approx (20,09 ; 24,53 ; 11,02)$$

Ces valeurs représentent les facteurs qui permettent de passer de A_x à B_x sur chaque dimension.

Elles ne constituent pas directement les composantes de la distance.

6. Passage des rapports aux longueurs relationnelles

On applique le logarithme à chaque rapport :

$$\ln(e^3) = 3$$

$$\ln(e^{3.2}) = 3,2$$

$$\ln(e^{2.4}) = 2,4$$

Ainsi :

$$\ln(B_x \div A_x) = (3 ; 3,2 ; 2,4)$$

On retrouve exactement le déplacement du référentiel additif :

$$B_+ - A_+ = (3 ; 3,2 ; 2,4)$$

La relation fondamentale entre les deux référentiels est donc :

$$\ln(B_x \div A_x) = B_+ - A_+$$

Les différences additives et les logarithmes des rapports multiplicatifs forment le même vecteur géométrique.

7. Calcul de la distance multiplicative

La distance multiplicative est :

$$d_x(A_x, B_x) = \sqrt{(3^2 + 3,2^2 + 2,4^2)}$$

Donc :

$$d_x(A_x, B_x) = \sqrt{(9 + 10,24 + 5,76)}$$

$$d_x(A_x, B_x) = \sqrt{25}$$

$$d_x(A_x, B_x) = 5$$

Les deux référentiels produisent donc la même distance :

$$d_+(A_+, B_+) = d_x(A_x, B_x) = 5$$

8. Les coordonnées utilisées dans les deux référentiels

Référentiel additif

$$A+ = (2 ; 3 ; 5)$$

$$B+ = (5 ; 6,2 ; 7,4)$$

Relation entre les points :

$$B+ - A+ = (3 ; 3,2 ; 2,4)$$

Distance :

$$d+(A+, B+) = 5$$

Référentiel relationnel multiplicatif

$$A\times = (e^2 ; e^3 ; e^5)$$

$$B\times = (e^5 ; e^{6.2} ; e^{7.4})$$

Approximativement :

$$A\times \approx (7,39 ; 20,09 ; 148,41)$$

$$B\times \approx (148,41 ; 492,75 ; 1\,635,98)$$

Relation multiplicative :

$$B\times \div A\times = (e^3 ; e^{3.2} ; e^{2.4})$$

Logarithme de la relation :

$$\ln(B\times \div A\times) = (3 ; 3,2 ; 2,4)$$

Distance :

$$d\times(A\times, B\times) = 5$$

9. Preuve générale

La démonstration repose sur l'identité suivante :

$$e^b \div e^a = e^{b-a}$$

En prenant le logarithme :

$$\ln(e^b \div e^a) = b - a$$

Cette propriété s'applique séparément sur chaque dimension.

Si :

$$A\times = \exp(A+)$$

et :

$$B\times = \exp(B+)$$

alors :

$$\ln(B\times \div A\times) = B+ - A+$$

La norme du vecteur obtenu est donc identique dans les deux référentiels :

$$d\times(\exp(A+), \exp(B+)) = d+(A+, B+)$$

Cette égalité est valable pour n'importe quel couple de points de l'espace additif tridimensionnel.

Elle ne dépend pas uniquement de l'exemple donnant la distance 5.

10. Différence entre les deux référentiels

Dans le référentiel additif, la relation :

$B+ - A+$

mesure une variation absolue.

Dans le référentiel multiplicatif, la relation :

$\ln(B \times \div A \times)$

mesure une variation proportionnelle.

Les deux référentiels peuvent produire la même distance, mais ils n'utilisent pas :

- les mêmes coordonnées ;
- la même opération primitive ;
- la même interprétation du déplacement.

Le référentiel additif compare des écarts absolus.

Le référentiel multiplicatif compare des facteurs de transformation.

11. Test d'invariance de jauge

Dans le référentiel multiplicatif, on peut multiplier les deux points par une même valeur positive G sans modifier leur distance.

En effet :

$$(G \times B \times) \div (G \times A \times) = B \times \div A \times$$

Le facteur G disparaît dans le rapport.

Ainsi :

$$d \times (G \times A \times, G \times B \times) = d \times (A \times, B \times)$$

La distance reste donc égale à 5.

Dans le référentiel additif, multiplier les deux points par 10 multiplie également leur différence et leur distance par 10 :

$$d + (10A +, 10B +) = 10 \times d + (A +, B +)$$

La distance passe alors de 5 à 50.

Le référentiel multiplicatif est invariant sous une multiplication commune des coordonnées.

Le référentiel additif ne possède pas cette invariance : sa distance dépend directement de l'échelle choisie.

12. Conclusion

Le référentiel additif utilise les coordonnées :

$$A+ = (2 ; 3 ; 5)$$

$$B+ = (5 ; 6,2 ; 7,4)$$

Leur différence est :

$$B+ - A+ = (3 ; 3,2 ; 2,4)$$

et leur distance vaut :

$$d + (A+, B+) = 5$$

Le référentiel relationnel multiplicatif utilise d'autres coordonnées :

$$A_x = (e^2 ; e^3 ; e^5)$$

$$B_x = (e^5 ; e^{6.2} ; e^{7.4})$$

Leurs rapports sont :

$$B_x \div A_x = (e^3 ; e^{3.2} ; e^{2.4})$$

Les logarithmes de ces rapports sont :

$$\ln(B_x \div A_x) = (3 ; 3,2 ; 2,4)$$

La distance multiplicative vaut donc également :

$$d_x(A_x, B_x) = 5$$

Le même résultat est retrouvé dans deux référentiels à partir de coordonnées différentes :

$$d_+(A_+, B_+) = d_x(A_x, B_x) = 5$$

La correspondance centrale est :

$$B_+ - A_+ = \ln(B_x \div A_x)$$

L'exponentielle transforme les positions additives en positions multiplicatives.

Le logarithme transforme les rapports multiplicatifs en déplacements comparables à des différences additives.

La distance est conservée parce que le vecteur des différences additives et le vecteur des logarithmes des rapports multiplicatifs sont identiques.

Oui. **Le noyau mathématique de cette démonstration est déjà connu.** Il correspond à la géométrie dite **log-euclidienne**.

Ce qui est déjà établi

Sur l'espace positif à trois dimensions,

$$[\mathbb{R}_{>0}]^3,$$

muni de la multiplication coordonnée par coordonnée, le logarithme transforme la multiplication en addition :

$$[\log(x \times y) = \log x + \log y,$$

et le rapport en différence :

$$[\log(B \div A) = \log B - \log A.$$

La distance

$$[d_{\times}(A, B) \\ \left| \log B - \log A \right|$$

]

est donc la distance euclidienne après passage aux coordonnées logarithmiques. Les travaux sur les métriques log-euclidiennes formalisent précisément ce principe : l'espace transformé par le logarithme devient isomorphe et isométrique à un espace vectoriel euclidien. Arsigny, Fillard, Pennec et Ayache l'ont notamment développé pour les matrices symétriques définies positives en 2005–2007 ; les nombres réels positifs et les vecteurs positifs constituent le cas diagonal élémentaire de cette structure. ([Inria HAL](#))

Ce que démontre exactement notre exemple

Dans le référentiel additif :

[

$A_+ = (2, 3, 5),$

]

[

$B_+ = (5, 2, 4).$

]

Le vecteur de déplacement est :

[

$B_+ - A_+ = (3, 2, 4).$

]

Sa longueur vaut :

[

$d_+(A_+, B_+)$

$\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}$

5.

]

On construit ensuite des coordonnées différentes dans le référentiel multiplicatif :

[

$A_+ \times$

$(e^2, e^3, e^5),$

]

[

$B_+ \times$

$(e^5, e^2, e^4).$

]

Les rapports sont :

[

$B_+ \times \div A_+ \times$

$(e^3, e^2, e^4).$

]

Leurs logarithmes donnent :

$$\left[\begin{array}{l} \log(B \times \text{div } A \times) \\ (3, 3, 2, 2, 4). \end{array} \right]$$

La distance multiplicative devient donc :

$$\left[\begin{array}{l} d \times (A \times, B \times) \\ \sqrt{3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2} \\ 5. \end{array} \right]$$

L'identité générale est :

$$\left[\begin{array}{l} d \times (e^A, e^B) \\ d_+(A, B). \end{array} \right]$$

Cette égalité découle directement de :

$$\left[\begin{array}{l} \log(e^B \text{div } e^A) = B - A. \end{array} \right]$$

Ainsi, **retrouver la même distance à partir de coordonnées différentes dans les deux référentiels est un résultat standard d'isométrie par changement de coordonnées**. Ce n'est pas, pris isolément, un nouveau théorème.

C'est une étude de rapport d'opérations fondamentales dans la continuité des bases de calculs d'un système complexe

La formulation adéquate repose sur deux objets déjà connus :

1. les **quadruplets pythagoriciens entiers**, pour la partie géométrique ;
2. les **vecteurs d'exposants ou de valuations**, pour la correspondance entre addition et multiplication.

Les valuations vérifient exactement :

$$v_p(x \times y) = v_p(x) + v_p(y)$$

et :

$$v_p(y \div x) = v_p(y) - v_p(x).$$

Ce qui peut rester propre à ton travail

L'originalité ne se trouve donc pas dans l'identité logarithmique elle-même, mais dans :

- l'emploi de cette géométrie comme **référentiel relationnel général** ;
- la manière de coordonnatiser les pintones ou les objets d'ÉTR ;
- la sélection ou la construction des positions multiplicatives ;
- les lois de comparaison entre plusieurs référentiels ;
- l'interprétation du résultat comme relation, orientation, proximité ou dynamique ;
- les critères expérimentaux permettant de distinguer cette représentation d'un simple changement de variables.

Une distinction importante avec la géométrie d'Aitchison

Cette construction est proche des géométries par log-rapports utilisées pour les données compositionnelles, développées notamment par John Aitchison. Toutefois, ce n'est pas exactement la même structure. La géométrie d'Aitchison travaille généralement sur des compositions définies à un facteur d'échelle près et utilise des log-rapports entre composantes ou des coordonnées logarithmiques centrées. ([Project Euclid](#))

Notre distance

$$[d_{\times}(A,B)=|\log B-\log A|]$$

est invariante lorsqu'on applique **la même multiplication coordonnée par coordonnée aux deux points** :

$$[d_{\times}(G \times A, G \times B) = d_{\times}(A, B).]$$

Mais elle n'est pas invariante lorsque (A) et (B) sont remis à l'échelle indépendamment. Cette seconde invariance correspondrait plutôt à une géométrie projective ou compositionnelle de type Aitchison.

Verdict scientifique

La démonstration est connue sous la forme suivante :

$$[\big((\mathbb{R}^{>0})^3, \times, d_{\times}\big)]$$

est isométrique à :

$$[\big(\mathbb{R}^3, +, d_{+}\big)]$$

par l'application logarithme.

En revanche, **son intégration dans la TRPM ou dans ÉTR peut constituer une construction spécifique**, à condition de ne pas présenter l'isométrie logarithmique elle-même comme une découverte nouvelle.

Reléguer logarithmes et exponentielles au rôle d'extension, voire de fonctions de conversions vers les réels plutôt qu'au rôle de fondement de la démonstration.

La formulation adéquate repose sur deux objets déjà connus :

1. les **quadruplets pythagoriciens entiers**, pour la partie géométrique ;
2. les **vecteurs d'exposants ou de valuations**, pour la correspondance entre addition et multiplication.

Les valuations vérifient exactement :

$$v_p(x \times y) = v_p(x) + v_p(y)$$

et :

$$v_p(y \div x) = v_p(y) - v_p(x).$$

Elles transforment donc un rapport multiplicatif en une différence entière, sans employer de logarithme réel. Le groupe multiplicatif des rationnels positifs est précisément représentable par les exposants entiers de ses facteurs premiers. ([ScienceDirect](#))

1. Le problème entier associé à notre exemple

Dans le référentiel additif :

$$A_+ = (2 ; 3 ; 5)$$

$$B_+ = (5 ; 6,2 ; 7,4)$$

Le déplacement est :

$$\delta = (3 ; 3,2 ; 2,4)$$

et :

$$D_+ = \sqrt{(3^2 + 3,2^2 + 2,4^2)} = 5.$$

Pour supprimer les décimales, on multiplie toutes les coordonnées par 5 :

$$5A_+ = (10 ; 15 ; 25)$$

$$5B_+ = (25 ; 31 ; 37)$$

Le déplacement entier devient :

$$\Delta = (15 ; 16 ; 12).$$

Sa longueur entière est :

$$\sqrt{(15^2 + 16^2 + 12^2)}$$

$$= \sqrt{(225 + 256 + 144)}$$

$$= \sqrt{625}$$

= 25.

Comme l'unité a été multipliée par 5, la distance réelle est :

$$25 \div 5 = 5.$$

Le quadruplet obtenu est donc :

(15 ; 16 ; 12 ; 25)

avec :

$$15^2 + 16^2 + 12^2 = 25^2.$$

Il s'agit bien d'un quadruplet pythagoricien entier. Les familles de solutions entières de ce type sont connues et paramétrables. ([arXiv](#))

2. Table multiplicative entièrement entière

Prenons la base entière 2.

Les indices additifs entiers sont :

$$A_i = (10 ; 15 ; 25)$$

$$B_i = (25 ; 31 ; 37).$$

On leur associe les positions multiplicatives suivantes :

$$A_x = (2^{10} ; 2^{15} ; 2^{25})$$

$$B_x = (2^{25} ; 2^{31} ; 2^{37}).$$

En valeurs entières :

$$A_x = (1\,024 ; 32\,768 ; 33\,554\,432)$$

$$B_x = (33\,554\,432 ; 2\,147\,483\,648 ; 137\,438\,953\,472).$$

La table complète est alors :

Dimension	A ₊	B ₊	Différence	A _x	B _x	Rapport B _x ÷ A _x	Exposant du rapport
x	2	5	3	1 024	33 554 432	32 768	15
y	3	6,2	3,2	32 768	2 147 483 648	65 536	16
z	5	7,4	2,4	33 554 432	137 438 953 472	4 096	12

En effet :

$$33\,554\,432 \div 1\,024 = 32\,768 = 2^{15}$$

$$2\,147\,483\,648 \div 32\,768 = 65\,536 = 2^{16}$$

$$137\,438\,953\,472 \div 33\,554\,432 = 4\,096 = 2^{12}.$$

Le vecteur relationnel multiplicatif entier est donc :

$$\Delta_x = (15 ; 16 ; 12).$$

En tenant compte de l'unité choisie, égale à 1/5 :

$$\delta_x = (15/5 ; 16/5 ; 12/5)$$

$$= (3 ; 3,2 ; 2,4).$$

La distance relationnelle vaut alors :

$$D_x = \sqrt{(15^2 + 16^2 + 12^2)} \div 5$$

$$= 25 \div 5$$

$$= 5.$$

Nous obtenons donc exactement :

$$D_+ = D_x = 5.$$

3. La preuve sans logarithme réel

La preuve repose seulement sur la règle des puissances entières :

$$2^b \div 2^a = 2^{b-a}.$$

Sur les trois dimensions :

$$2^{25} \div 2^{10} = 2^{15}$$

$$2^{31} \div 2^{15} = 2^{16}$$

$$2^{37} \div 2^{25} = 2^{12}.$$

Il suffit ensuite de lire les exposants :

$$(25 - 10 ; 31 - 15 ; 37 - 25)$$

$$= (15 ; 16 ; 12).$$

La relation fondamentale devient donc :

différence des indices additifs

= exposants des rapports multiplicatifs.

Autrement dit :

$$B_i - A_i = v_2(B_x \div A_x).$$

Ici, v_2 désigne simplement le nombre de facteurs 2 contenus dans une puissance ou dans un rapport rationnel.

La correspondance est exacte et entièrement arithmétique :

- soustraction des indices dans le référentiel additif ;
- division des positions dans le référentiel multiplicatif ;
- comptage entier des facteurs dans le rapport ;
- même vecteur relationnel ;
- même distance après application de la même unité.

4. Ce que les logarithmes et exponentielles faisaient réellement

Dans la démonstration précédente, les expressions e^x et $\ln(x)$ réalisaient la même opération, mais sur tout l'espace des nombres réels positifs.

La version entière utilise :

$$n \mapsto 2^n$$

et :

$$2^n \mapsto n.$$

Il ne s'agit pas de l'exponentielle analytique e^x , mais d'une table de puissances entières pouvant être produite par multiplications répétées. Le logarithme réel est remplacé par la lecture exacte de l'exposant :

$$v_2(2^n) = n.$$

Ainsi :

$$\ln(Bx \div Ax)$$

est remplacé, sur cette table discrète, par :

$$v_2(Bx \div Ax).$$

Les logarithmes et exponentielles ne sont donc pas nécessaires pour démontrer la correspondance opérationnelle sur un domaine entier ou rationnel. Ils deviennent nécessaires lorsqu'on souhaite étendre continûment cette correspondance à tous les nombres réels positifs.

5. Généralisation à tous les rationnels positifs

Une seule base, comme 2, ne représente que les nombres de la forme : 2^n .

Pour représenter tous les rationnels positifs, on utilise les nombres premiers comme générateurs.

Par exemple :

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

est représenté par le vecteur entier :

$$E(360) = (3 ; 2 ; 1 ; 0 ; 0 ; \dots).$$

Et :

$$45/28 = 2^{-2} \times 3^2 \times 5^1 \times 7^{-1}$$

est représenté par :

$$E(45/28) = (-2 ; 2 ; 1 ; -1 ; 0 ; \dots).$$

La multiplication devient une addition de vecteurs :

$$E(x \times y) = E(x) + E(y).$$

La division devient une soustraction :

$$E(y \div x) = E(y) - E(x).$$

Cette représentation est exacte, entière et de support fini. Le groupe des rationnels positifs sous la multiplication est un groupe abélien libre dont les nombres premiers constituent les générateurs. ([ScienceDirect](#))

6. Limite importante pour la distance 5

Avec une unité entière standard et trois composantes strictement positives, il n'existe pas de triplet entier donnant directement une longueur 5.

Il faudrait :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 25$$

avec a , b et c entiers strictement positifs.

Or la seule décomposition par trois carrés entiers, à permutation et signes

près, est :

$$25 = 4^2 + 3^2 + 0^2.$$

Une dimension serait donc inactive.

Pour conserver trois dimensions actives, il faut soit :

- employer des composantes rationnelles comme (3 ; 3,2 ; 2,4) ;
- soit employer le quadruplet entier mis à l'échelle (15 ; 16 ; 12 ; 25), avec une unité égale à 1/5.

La seconde solution constitue précisément la table entière recherchée.

Conclusion

La preuve peut être formulée sans logarithme ni exponentielle réels.

La structure entière est :

Référentiel additif mis à l'échelle :

$$A_i = (10 ; 15 ; 25)$$

$$B_i = (25 ; 31 ; 37)$$

$$B_i - A_i = (15 ; 16 ; 12).$$

Référentiel multiplicatif entier :

$$A_x = (1\,024 ; 32\,768 ; 33\,554\,432)$$

$$B_x = (33\,554\,432 ; 2\,147\,483\,648 ; 137\,438\,953\,472)$$

Les rapports possèdent les exposants :

$$v_2(B_x \div A_x) = (15 ; 16 ; 12).$$

La distance dans l'unité 1/5 vaut, dans les deux cas :

$$\sqrt{(15^2 + 16^2 + 12^2)} \div 5 = 5.$$

La relation n'est donc pas d'abord :

différence $\leftrightarrow$ logarithme du rapport,

mais plus fondamentalement :

différence des indices $\leftrightarrow$ exposant du rapport.

Le logarithme réel constitue l'extension continue de cette relation discrète. La table des valuations ou des exposants en fournit la version entière, exacte et purement opérationnelle.

Note :

C'est juste — mathématiquement irréprochable de bout en bout. La construction est correcte, chaque calcul tient, et le document a corrigé exactement l'erreur qui rendait ton premier comparatif faux : le logarithme est maintenant à sa place, et la section 3 en donne même la justification

par le test $d(A,A)=\sqrt{3}\neq 0$ sans log $\log \rightarrow 0$ avec log. Les valeurs numériques sont exactes ($e^2\approx 7.39$, $e^5\approx 148.41$, $e^{7.4}\approx 1635.98$), la section 9 énonce la preuve générale au bon niveau ($\ln(e^b/e^a)=b-a$ par dimension), et la section 11 ajoute le test de jauge qui manquait — l'invariance sous G commun côté $\times$, la dépendance à l'échelle côté $+$.

Le cœur, la section 6, est la bonne identité et la vraie leçon épistémologique : $\ln(B \times \oslash A) = B_+ - A_+$. Les différences additives et les log-rapports multiplicatifs sont *le même vecteur géométrique*. C'est pour ça que les distances coïncident : $\exp$ est une isométrie de l'espace additif vers l'espace multiplicatif-log. Rien à corriger.

Deux précisions de rigueur, non pas des erreurs mais des bornes à énoncer pour que le document ne soit pas surinterprété.

Le titre et la section 1 disent « démontrer que deux couples de points **différents** produisent la même distance ». Attention à la formulation : $A \times$ n'est pas un *autre couple de points* dans le même espace — c'est *le même couple*, lu dans une autre carte. $\exp$ est une bijection ; (A_+, B_+) et $(A \times, B \times)$ sont deux représentations d'un unique objet relationnel. La distance est conservée non par coïncidence entre deux systèmes indépendants, mais parce que c'est une seule géométrie vue à travers deux atlas ($\log / \exp$). Le document le dit correctement au §10 et §12 (« l'exponentielle transforme les positions ») — c'est juste le mot « différentes » du §1 qui pourrait laisser croire à deux mondes séparés produisant fortuitement le même nombre. Ce n'est pas fortuit : c'est structurel.

Second point, plus subtil, et c'est le seul endroit où le document affirme un peu plus qu'il ne prouve. La section 9 conclut « valable pour n'importe quel couple ». Vrai — mais uniquement pour cette **paire isolée**, et uniquement parce que la norme choisie est la même (L^2 euclidienne) des deux côtés. L'identité $d \times (\exp A, \exp B) = d_+(A, B)$ est l'isométrie de $\exp$; elle tient pour deux points quels qu'ils soient. Ce qu'elle ne dit pas — et le document ne le prétend pas, mais un lecteur pourrait l'extrapoler — c'est que le référentiel $\times$ entier serait « le même » que le $+$. Il l'est *localement*, paire par paire ; il cesse de l'être globalement dès qu'on introduit **trois pintones ou plus formant un cycle**. Là, l'additif ferme toujours ($(x_B - x_A) + (x_C - x_B) + (x_A - x_C) = 0$ trivialement), mais le multiplicatif ne ferme que si les log-rapports observés dérivent réellement d'un potentiel — c'est ta condition d'holonomie $\bigodot_{\{\text{cycle}\}} R = 1$. Autrement dit : sur une paire, $+$ et $\times$ sont isométriques sans réserve ; sur un réseau, l'additif suppose *toujours* une carte cohérente, tandis que le multiplicatif *peut* révéler qu'aucune n'existe ($\mathcal{K} \neq 1$). C'est précisément ce que le référentiel multiplicatif apporte et que l'additif ne peut pas voir — le comparatif à deux points le

cache par construction, puisqu'à deux points il n'y a pas de cycle.
 Donc : le document est juste, et c'est le bon socle. La seule chose que je lui ajouterais pour qu'il soit *complet* épistémologiquement, c'est une section 13 à trois points — A, B, C — où tu montres que $d_+ + d_-$ et $d_+ \times d_-$ coïncident encore paire à paire, mais où seul le $\times$ porte la question « ces trois distances sont-elles mutuellement cohérentes ? ». C'est là que les deux référentiels cessent d'être interchangeables, et c'est là que se lit vraiment ce que « relationnel » veut dire.

Nuance dans un référentielle relationnel multiplicatif

le point essentiel est que **la nuance n'est pas la seule distance entre A et B**. Elle provient de la configuration complète formée par :

- le neutre multiplicatif ($O=(1;1;1)$) ;
- la position de A relativement à (O) ;
- la position de B relativement à (O) ;
- la relation directe de A vers B ;
- l'orientation respective des deux positions.

Le document distingue déjà le rayon d'excentration et la corde relationnelle, mais il faut maintenant les réunir dans un même objet descriptif sans les additionner arbitrairement.

1. La configuration relationnelle complète

Pour deux points positifs :

$$A = (a_x ; a_y ; a_z)$$

$$B = (b_x ; b_y ; b_z)$$

et pour le neutre :

$$O = (1 ; 1 ; 1)$$

il existe trois relations fondamentales :

$$O \rightarrow A : A \div O = A$$

$$O \rightarrow B : B \div O = B$$

$$A \rightarrow B : B \div A$$

Les deux premières indiquent **où se trouvent A et B relativement au neutre**.

La troisième indique **comment A doit être transformé pour devenir B**. Ainsi, deux couples peuvent avoir une distance A–B voisine tout en

représentant des nuances différentes, parce que leurs positions relativement à (1) et leurs orientations ne sont pas les mêmes.

2. Les trois distances nécessaires

Dans la géométrie multiplicative, on mesure :

$e(A)$ = distance de O à A

$e(B)$ = distance de O à B

$d(A,B)$ = distance directe entre A et B

Avec la lecture multiplicative continue :

$e(A)$ = longueur de $(\ln a_x ; \ln a_y ; \ln a_z)$

$e(B)$ = longueur de $(\ln b_x ; \ln b_y ; \ln b_z)$

$d(A,B)$ = longueur de

$(\ln(b_x \div a_x) ; \ln(b_y \div a_y) ; \ln(b_z \div a_z))$

Ces trois longueurs forment un triangle relationnel :

$O - A - B$

La nuance dépend donc de la **forme de ce triangle**, et non uniquement de sa corde A-B.

3. Premier couple

$A_1 = (1,1 ; 1,2 ; 1,4)$

$B_1 = (1 ; 1,1 ; 2)$

Position relativement au neutre

A_1 est relativement proche de (1) sur les trois dimensions :

$O \rightarrow A_1 = (1,1 ; 1,2 ; 1,4)$

B_1 est neutre sur x, proche sur y, mais plus éloigné sur z :

$O \rightarrow B_1 = (1 ; 1,1 ; 2)$

Les distances au neutre sont approximativement :

$e(A_1) = 0,394$

$e(B_1) = 0,700$

B_1 est donc sensiblement plus excentré que A_1 , principalement à cause de la coordonnée ($z=2$).

Relation directe entre A_1 et B_1

$B_1 \div A_1 =$

$(1 \div 1,1 ; 1,1 \div 1,2 ; 2 \div 1,4)$

soit approximativement :

$(0,909 ; 0,917 ; 1,429)$

Cette relation signifie :

- légère contraction sur x ;

- légère contraction sur y ;
- expansion importante sur z.

La distance directe vaut approximativement :

$$d(A_1, B_1) = 0,379$$

L'angle relationnel entre les directions $O \rightarrow A_1$ et $O \rightarrow B_1$ vaut environ : 25°

Les deux points sont donc :

- relativement proches ;
- orientés dans une direction générale similaire ;
- mais différenciés par une amplification dominante sur z.

Une étiquette descriptive possible serait :

Proximité concordante avec amplification axiale z

Ou, dans une nomenclature plus compacte :

Lien proche — même secteur — expansion z

4. Second couple

$$A_2 = (1,4 ; 1,5 ; 1,4)$$

$$B_2 = (1 ; 1,4 ; 1)$$

Position relativement au neutre

A_2 est excentré sur les trois axes :

$$O \rightarrow A_2 = (1,4 ; 1,5 ; 1,4)$$

B_2 est neutre sur x et z, mais excentré sur y :

$$O \rightarrow B_2 = (1 ; 1,4 ; 1)$$

Les distances au neutre valent approximativement :

$$e(A_2) = 0,625$$

$$e(B_2) = 0,336$$

Cette fois, A_2 est plus excentré que B_2 .

Relation directe entre A_2 et B_2

$$B_2 \div A_2 =$$

$$(1 \div 1,4 ; 1,4 \div 1,5 ; 1 \div 1,4)$$

soit approximativement :

$$(0,714 ; 0,933 ; 0,714)$$

Cette relation signifie :

- contraction importante sur x ;
- légère contraction sur y ;

- contraction importante sur z.

La distance directe vaut approximativement :

$$d(A_2, B_2) = 0,481$$

L'angle entre les directions $O \rightarrow A_2$ et $O \rightarrow B_2$ vaut environ :

50°.

Les deux points sont donc :

- plus éloignés l'un de l'autre que dans le premier exemple ;
- moins alignés depuis le neutre ;
- reliés par une contraction dominante sur x et z ;
- engagés dans un mouvement de retour vers le neutre.

Une étiquette descriptive possible serait :

Proximité oblique avec contraction bilatérale x-z

Ou :

Lien modéré — secteurs distincts — retour x-z vers le neutre

5. Pourquoi les deux couples ne portent pas la même nuance

Les résultats peuvent être résumés ainsi :

Mesure	Couple 1	Couple 2
Distance O-A	0,394	0,625
Distance O-B	0,700	0,336
Distance A-B	0,379	0,481
Angle OÂB relationnel	environ 25°	environ 50°
Transformation dominante	expansion z	contraction x et z
Sens radial	B s'éloigne du neutre	B revient vers le neutre

Le premier couple décrit deux positions **proches et presque co-orientées**, avec une différenciation concentrée sur z.

Le second décrit deux positions **moins proches et davantage désalignées**, avec une contraction vers le neutre sur deux dimensions.

La nuance ne réside donc pas seulement dans :

$$d(A, B)$$

mais dans l'ensemble :

$$N(A, B|O) =$$

[e(A) ; e(B) ; d(A, B) ; orientation ; rapports par dimension]

6. Définition correcte de la nuance relationnelle

La **nuance relationnelle multiplicative** peut être définie comme :

La description structurée de la position de deux objets relativement au neutre multiplicatif, de leur distance mutuelle, de leur orientation et de la répartition dimensionnelle des rapports permettant de passer de l'un à l'autre.

Elle contient au minimum cinq informations.

1. Excentration de A

À quelle distance relationnelle A se trouve-t-il de (1) ?

2. Excentration de B

À quelle distance relationnelle B se trouve-t-il de (1) ?

3. Distance mutuelle

Quelle est l'amplitude globale de la transformation $A \rightarrow B$?

4. Orientation relationnelle

A et B s'éloignent-ils du neutre dans la même direction, dans des directions obliques ou dans des directions opposées ?

5. Signature dimensionnelle

Sur quels axes la relation est-elle :

- expansive ;
- contractive ;
- neutre ;
- dominante ;
- compensée par une autre dimension ?

7. La distance devient une composante de nuance

La distance $A-B$ est bien une **distance de nuance**, mais elle n'épuise pas la nuance.

Deux relations de même longueur peuvent être très différentes :

($\times 2$; $\times 1$; $\times 1$)

et :

($\times 1,26$; $\times 1,26$; $\times 1,26$)

peuvent recevoir une amplitude globale comparable selon la métrique choisie, mais :

- la première est concentrée sur un axe ;
- la seconde est distribuée isotropiquement ;
- leur sens descriptif n'est donc pas identique.

La nuance complète doit conserver le vecteur des rapports :

$$R(A \rightarrow B) = B \div A$$

et pas seulement sa longueur.

La distance fournit :

combien la relation change

Le vecteur des rapports fournit :

comment elle change

Les distances au neutre fournissent :

depuis quel état et vers quel état elle change

L'angle fournit :

si les deux positions appartiennent au même secteur relationnel

8. Système d'étiquettes descriptives

Une étiquette scientifique peut être construite sous la forme :

[ancrage] — [proximité] — [orientation] — [transformation]

Pour le premier couple :

A proche / B modérément excentré — proximité forte — orientation concordante — amplification z

Pour le second :

A modérément excentré / B proche — proximité moyenne — orientation oblique — contraction x-z

Une version condensée pourrait être :

$N_1 = \text{proche} \cdot \text{concordant} \cdot \text{expansif-z}$

$N_2 = \text{modéré} \cdot \text{oblique} \cdot \text{contractif-xz}$

9. Les rapports qui produisent réellement l'étiquette

L'étiquette ne doit pas être attribuée directement aux coordonnées absolues, mais aux rapports structurants :

Pour le premier couple :

$$R_1 = (0,909 ; 0,917 ; 1,429)$$

Les deux premières dimensions diminuent légèrement ; la troisième augmente fortement.

Pour le second couple :

$$R_2 = (0,714 ; 0,933 ; 0,714)$$

Les dimensions x et z diminuent fortement ; y diminue faiblement.

Ce sont donc bien **les rapports** qui changent et qui déterminent la nature de la nuance.

Les coordonnées relativement au neutre déterminent l'état des deux points.

Les rapports $A \rightarrow B$ déterminent la transformation.

La géométrie $O-A-B$ détermine la classe relationnelle complète.

Définition finale

Une nuance relationnelle multiplicative est la forme géométrique et descriptive du triangle constitué par le neutre multiplicatif, le point initial et le point final. Elle est déterminée par les deux excentrations, la distance mutuelle, l'angle relationnel et la signature coordonnée des rapports.

La structure minimale devient donc :

Nuance(A,B) =

position de A par rapport à 1

- position de B par rapport à 1
- rapport de A vers B
- distance entre A et B
- orientation des deux rayons.

Ce n'est pas une simple proximité. C'est une **qualification complète du changement relationnel**.